

Supplementary Materials

Inferences for Nadarajah-Haghighi Parameters Via Type-II Adaptive Progressive Hybrid Censoring with Applications

Ahmed Elshahhat^{1*}, Refah Alotaibi² and Mazen Nassar^{3,4}

¹ Faculty of Technology and Development, Zagazig University, Zagazig 44519, Egypt

³ Department of Mathematical Sciences, College of Science, Princess Nourah bint Abdulrahman University, P.O. Box 84428, Riyadh 11671, Saudi Arabia

³ Department of Statistics, Faculty of Science, King Abdulaziz University, Jeddah 21589, Saudi Arabia

⁴ Department of Statistics, Faculty of Commerce, Zagazig University, Egypt

*Email: aelshahhat@ftd.zu.edu.eg

Table S1: The RMSEs (1st column) and MRABs (2nd column) of β .

T	(n, m)	Scheme	MLE	SE				GE		
				Prior-1		Prior-2		Prior-1		
								Prior-2		
$\rho \rightarrow$										
0.5	(50,20)	1	0.380	0.450	0.092	0.171	0.086	0.172	0.082	0.165
		2	0.542	0.598	0.080	0.143	0.035	0.070	0.032	0.063
		3	1.375	0.665	0.200	0.397	0.198	0.395	0.191	0.403
	(50,40)	1	0.251	0.284	0.196	0.389	0.194	0.387	0.188	0.395
		2	0.362	0.513	0.045	0.078	0.023	0.045	0.025	0.049
		3	1.083	0.567	0.045	0.074	0.034	0.068	0.038	0.075
	(100,40)	1	0.234	0.276	0.079	0.140	0.076	0.152	0.076	0.152
		2	0.346	0.378	0.035	0.056	0.022	0.043	0.021	0.042
		3	0.470	0.451	0.044	0.072	0.016	0.031	0.024	0.049
1.0	(100,80)	1	0.106	0.153	0.238	0.462	0.225	0.424	0.237	0.312
		2	0.286	0.208	0.288	0.534	0.285	0.422	0.261	0.323
		3	0.470	0.451	0.235	0.425	0.162	0.350	0.181	0.274
	(100,80)	1	0.106	0.153	0.032	0.051	0.018	0.036	0.004	0.027
		2	0.286	0.208	0.038	0.060	0.006	0.011	0.003	0.005
		3	0.470	0.451	0.235	0.425	0.162	0.350	0.181	0.274
	(50,20)	1	0.537	0.435	0.086	0.157	0.077	0.154	0.083	0.166
		2	0.763	0.771	0.048	0.090	0.045	0.091	0.044	0.089
		3	1.268	0.873	0.063	0.110	0.052	0.104	0.047	0.094
1.0	(50,40)	1	0.518	0.316	0.214	0.420	0.207	0.414	0.219	0.438
		2	0.523	0.525	0.162	0.319	0.199	0.398	0.162	0.324
		3	1.105	0.572	0.038	0.061	0.020	0.041	0.029	0.059
	(100,40)	1	0.467	0.387	0.047	0.090	0.045	0.090	0.044	0.088
		2	0.685	0.498	0.202	0.400	0.159	0.317	0.203	0.406
		3	1.105	0.572	0.117	0.206	0.100	0.199	0.114	0.228
	(100,80)	1	0.467	0.387	0.035	0.054	0.004	0.007	0.019	0.037
		2	0.685	0.498	0.048	0.080	0.037	0.073	0.040	0.081
		3	1.105	0.572	0.048	0.078	0.012	0.024	0.027	0.053
1.0	(100,80)	1	0.312	0.163	0.119	0.192	0.061	0.120	0.104	0.208
		2	0.250	0.224	0.062	0.113	0.057	0.114	0.055	0.109
		3	0.384	0.266	0.029	0.046	0.008	0.014	0.005	0.008
	(50,20)	1	0.537	0.435	0.023	0.038	0.003	0.006	0.002	0.003
		2	0.763	0.771	0.040	0.063	0.006	0.059	0.021	0.041
		3	1.268	0.873	0.040	0.063	0.030	0.059	0.027	0.053

Table S2: The RMSEs (1st column) and MRABs (2nd column) of θ .

T	(n, m)	Scheme	MLE	SE				GE		
				Prior-1		Prior-2		Prior-1		
				$\rho \rightarrow$	-3	+3	-3	+3	-3	+3
0.5	(50,20)	1	0.676	0.696	0.215 0.093	0.127 0.053	0.188 0.078	0.125 0.052	0.174 0.075	0.115 0.053
		2	0.750	0.725	0.527 0.145	0.325 0.085	0.198 0.129	0.331 0.086	0.167 0.124	0.111 0.082
		3	0.803	0.813	0.263 0.226	0.146 0.110	0.217 0.111	0.144 0.074	0.189 0.142	0.124 0.095
		1	0.573	0.539	0.199 0.081	0.120 0.051	0.181 0.077	0.121 0.051	0.172 0.076	0.115 0.050
		2	0.672	0.644	0.199 0.068	0.117 0.043	0.177 0.050	0.118 0.033	0.158 0.063	0.305 0.042
		3	0.747	0.767	0.168 0.151	0.105 0.096	0.158 0.083	0.105 0.055	0.153 0.080	0.102 0.053
		1	0.565	0.414	0.181 0.070	0.103 0.044	0.155 0.067	0.103 0.044	0.143 0.066	0.095 0.044
		2	0.678	0.596	0.109 0.062	0.063 0.034	0.095 0.064	0.063 0.043	0.091 0.048	0.060 0.032
		3	0.715	0.690	0.116 0.094	0.074 0.055	0.145 0.055	0.096 0.036	0.109 0.054	0.073 0.036
	(100,40)	1	0.519	0.266	0.117 0.068	0.069 0.040	0.104 0.060	0.069 0.040	0.100 0.058	0.066 0.039
		2	0.548	0.527	0.064 0.061	0.033 0.033	0.044 0.025	0.029 0.024	0.018 0.010	0.027 0.013
		3	0.614	0.440	0.062 0.061	0.034 0.036	0.135 0.050	0.089 0.033	0.095 0.048	0.061 0.032
		1	0.530	0.674	0.210 0.083	0.129 0.052	0.195 0.079	0.130 0.052	0.186 0.078	0.124 0.052
		2	0.681	0.702	0.338 0.089	0.332 0.055	0.210 0.082	0.339 0.054	0.270 0.083	0.312 0.055
		3	0.718	0.752	0.254 0.087	0.146 0.049	0.223 0.072	0.148 0.048	0.203 0.069	0.135 0.046
		1	0.419	0.515	0.189 0.072	0.108 0.045	0.162 0.068	0.108 0.045	0.149 0.068	0.099 0.045
		2	0.545	0.629	0.203 0.068	0.115 0.043	0.173 0.065	0.115 0.043	0.158 0.064	0.105 0.043
		3	0.675	0.653	0.202 0.069	0.115 0.040	0.171 0.058	0.114 0.039	0.156 0.057	0.103 0.038
	(100,80)	1	0.471	0.401	0.159 0.066	0.072 0.039	0.102 0.058	0.068 0.039	0.098 0.057	0.066 0.038
		2	0.550	0.481	0.191 0.063	0.109 0.037	0.165 0.055	0.110 0.037	0.152 0.053	0.101 0.036
		3	0.575	0.593	0.078 0.062	0.041 0.034	0.055 0.051	0.037 0.034	0.051 0.049	0.034 0.033
		1	0.419	0.228	0.117 0.034	0.068 0.019	0.098 0.025	0.065 0.023	0.079 0.016	0.052 0.014
		2	0.462	0.447	0.111 0.062	0.065 0.034	0.097 0.051	0.064 0.034	0.093 0.049	0.062 0.033
		3	0.491	0.413	0.062 0.047	0.034 0.028	0.051 0.042	0.034 0.028	0.049 0.042	0.033 0.028

Table S3: The RMSEs (1st column) and MRABs (2nd column) of $R(t)$.

T	(n, m)	Scheme	MLE	SE				GE		
				Prior-1		Prior-2		Prior-1		
								Prior-2		
$\rho \rightarrow$										
0.5	(50,20)	1	0.028	0.023	0.017	0.017	0.016	0.017	0.016	0.017
					0.014	0.013	0.013	0.014	0.014	0.015
		2	0.027	0.022	0.028	0.030	0.028	0.030	0.028	0.030
	(50,40)	3	0.052	0.051	0.059	0.054	0.037	0.040	0.037	0.040
					0.037	0.040	0.031	0.033	0.031	0.033
		1	0.018	0.015	0.014	0.015	0.012	0.012	0.012	0.013
	(100,40)				0.013	0.012	0.008	0.009	0.010	0.011
		2	0.025	0.022	0.019	0.018	0.017	0.018	0.017	0.019
		3	0.042	0.041	0.016	0.016	0.015	0.016	0.015	0.016
1.0	(100,80)	1	0.018	0.015	0.033	0.034	0.032	0.034	0.030	0.032
					0.030	0.032	0.030	0.032	0.030	0.032
		2	0.022	0.018	0.012	0.011	0.011	0.011	0.010	0.011
	(100,80)	3	0.051	0.046	0.007	0.007	0.006	0.007	0.006	0.007
					0.004	0.004	0.003	0.003	0.003	0.002
		1	0.011	0.010	0.007	0.006	0.002	0.002	0.003	0.003
	(50,20)				0.004	0.004	0.001	0.002	0.002	0.002
		2	0.030	0.027	0.021	0.021	0.019	0.020	0.019	0.021
		3	0.032	0.029	0.009	0.010	0.013	0.013	0.011	0.011
1.0	(50,40)				0.029	0.030	0.028	0.030	0.028	0.030
		1	0.018	0.015	0.021	0.022	0.021	0.022	0.021	0.022
					0.021	0.022	0.021	0.022	0.021	0.022
	(100,40)	2	0.020	0.017	0.004	0.004	0.003	0.003	0.003	0.003
					0.005	0.004	0.002	0.003	0.002	0.002
		3	0.026	0.028	0.012	0.011	0.010	0.011	0.008	0.009
	(100,80)				0.015	0.014	0.011	0.012	0.013	0.014
		1	0.016	0.014	0.004	0.004	0.002	0.003	0.003	0.002
					0.004	0.004	0.002	0.002	0.004	0.003
1.0	(100,80)	2	0.020	0.016	0.007	0.007	0.006	0.007	0.005	0.004
					0.007	0.007	0.006	0.007	0.005	0.004
		3	0.026	0.025	0.013	0.011	0.013	0.014	0.011	0.012
	(50,20)				0.013	0.012	0.006	0.007	0.006	0.007
		1	0.013	0.011	0.007	0.006	0.004	0.003	0.003	0.003
					0.003	0.003	0.001	0.001	0.001	0.001
	(50,40)	2	0.013	0.010	0.008	0.007	0.006	0.006	0.006	0.007
					0.005	0.004	0.003	0.003	0.003	0.003
		3	0.022	0.020	0.007	0.007	0.006	0.007	0.006	0.007
	(100,80)				0.007	0.007	0.004	0.005	0.004	0.004

Table S4: The RMSEs (1st column) and MRABs (2nd column) of $h(t)$.

T	(n, m)	Scheme	MLE	SE				GE		
				Prior-1		Prior-2		Prior-1		
								Prior-2		
$\rho \rightarrow$										
0.5	(50,20)	1	0.200	0.225	0.187	0.214	0.134	0.159	0.161	0.130
					0.147	0.182	0.111	0.149	0.140	0.117
		2	0.227	0.258	0.190	0.228	0.174	0.149	0.155	0.173
	(50,40)	3	0.248	0.279	0.240	0.177	0.128	0.169	0.151	0.112
					0.189	0.153	0.118	0.111	0.132	0.102
		1	0.167	0.187	0.161	0.177	0.067	0.096	0.116	0.108
	(100,40)				0.132	0.173	0.036	0.075	0.082	0.100
		2	0.171	0.193	0.163	0.184	0.129	0.127	0.153	0.118
		3	0.187	0.201	0.137	0.161	0.084	0.094	0.140	0.143
1.0	(100,80)				0.133	0.130	0.031	0.090	0.123	0.086
		1	0.144	0.166	0.085	0.101	0.046	0.092	0.075	0.068
					0.045	0.058	0.023	0.051	0.026	0.029
	(100,80)	2	0.163	0.183	0.155	0.159	0.088	0.111	0.077	0.096
					0.125	0.133	0.072	0.088	0.064	0.092
		3	0.206	0.228	0.120	0.154	0.063	0.051	0.119	0.092
	(50,20)				0.117	0.122	0.015	0.049	0.060	0.063
		1	0.109	0.124	0.074	0.085	0.022	0.024	0.048	0.066
					0.043	0.055	0.012	0.012	0.024	0.026
1.0	(50,40)	2	0.130	0.147	0.071	0.089	0.063	0.090	0.060	0.086
					0.052	0.059	0.025	0.036	0.031	0.045
		3	0.141	0.161	0.087	0.118	0.016	0.049	0.094	0.064
	(100,40)				0.071	0.089	0.011	0.045	0.044	0.057
		1	0.185	0.221	0.103	0.138	0.097	0.138	0.093	0.133
					0.094	0.117	0.068	0.098	0.087	0.124
1.0	(50,80)	2	0.220	0.250	0.127	0.190	0.186	0.198	0.186	0.165
					0.101	0.135	0.109	0.166	0.124	0.147
		3	0.269	0.305	0.199	0.197	0.190	0.140	0.155	0.164
	(100,80)				0.160	0.173	0.138	0.115	0.115	0.130
		1	0.159	0.175	0.084	0.097	0.079	0.113	0.062	0.089
					0.072	0.082	0.030	0.043	0.043	0.061
	(100,80)	2	0.167	0.186	0.117	0.166	0.114	0.163	0.167	0.138
					0.075	0.095	0.067	0.096	0.091	0.130
		3	0.185	0.206	0.140	0.164	0.132	0.127	0.105	0.136
1.0	(100,40)				0.135	0.120	0.117	0.110	0.091	0.122
		1	0.149	0.170	0.082	0.098	0.029	0.040	0.024	0.025
					0.045	0.054	0.023	0.024	0.017	0.024
	(50,40)	2	0.183	0.204	0.103	0.160	0.095	0.135	0.064	0.091
					0.055	0.066	0.062	0.088	0.056	0.080
		3	0.260	0.243	0.143	0.143	0.123	0.106	0.064	0.091
1.0	(100,80)				0.120	0.111	0.067	0.096	0.064	0.091
		1	0.107	0.114	0.045	0.058	0.015	0.016	0.012	0.013
					0.032	0.038	0.013	0.014	0.011	0.012
	(50,20)	2	0.126	0.141	0.077	0.091	0.037	0.053	0.035	0.050
					0.045	0.061	0.028	0.040	0.032	0.046
		3	0.176	0.185	0.075	0.095	0.067	0.096	0.044	0.049
	(100,40)				0.075	0.095	0.038	0.051	0.021	0.015

Table S5: The ACLs (1st column) and CPs (2nd column) of ACI/HPD credible intervals of β .

T	(n, m)	Scheme	ACI		HPD				
			1	2	1	2			
Prior \rightarrow	0.5	(50,20)	1	0.625	0.940	0.169	0.952	0.103	0.968
			2	0.665	0.927	0.188	0.939	0.125	0.962
			3	0.732	0.902	0.266	0.918	0.189	0.944
	(50,40)		1	0.492	0.964	0.144	0.978	0.091	0.987
			2	0.585	0.945	0.147	0.960	0.102	0.969
			3	0.618	0.928	0.179	0.945	0.122	0.956
	(100,40)		1	0.463	0.964	0.137	0.977	0.086	0.981
			2	0.531	0.942	0.145	0.962	0.091	0.975
			3	0.621	0.922	0.179	0.932	0.138	0.960
	(100,80)		1	0.366	0.971	0.090	0.987	0.089	0.993
			2	0.426	0.965	0.116	0.976	0.092	0.983
			3	0.456	0.957	0.124	0.969	0.095	0.978
1.0	(50,20)		1	0.734	0.920	0.160	0.964	0.088	0.984
			2	0.802	0.907	0.169	0.950	0.094	0.980
			3	0.942	0.887	0.177	0.925	0.145	0.961
	(50,40)		1	0.665	0.945	0.129	0.988	0.084	0.995
			2	0.715	0.928	0.138	0.969	0.093	0.988
			3	0.798	0.913	0.145	0.951	0.119	0.979
	(100,40)		1	0.645	0.944	0.105	0.991	0.087	0.996
			2	0.754	0.929	0.115	0.968	0.092	0.991
			3	0.808	0.900	0.168	0.948	0.132	0.979
	(100,80)		1	0.464	0.954	0.087	0.993	0.066	0.998
			2	0.512	0.943	0.107	0.986	0.067	0.992
			3	0.605	0.936	0.111	0.984	0.076	0.988

Table S6: The ACLs (1st column) and CPs (2nd column) of ACI/HPD credible intervals of θ .

T	(n, m)	Scheme	ACI		HPD		
			1	2	1	2	
Prior \rightarrow	0.5	(50,20)	1	0.788	0.921	0.382	0.939
			2	0.822	0.907	0.355	0.925
			3	0.860	0.883	0.613	0.901
	(50,40)		1	0.727	0.928	0.220	0.947
			2	0.742	0.920	0.322	0.938
			3	0.757	0.914	0.550	0.932
	(100,40)		1	0.405	0.944	0.206	0.968
			2	0.532	0.934	0.215	0.957
			3	0.623	0.923	0.227	0.946
	(100,80)		1	0.517	0.956	0.126	0.980
			2	0.605	0.947	0.318	0.971
			3	0.620	0.945	0.483	0.969
1.0	(50,20)		1	0.450	0.932	0.330	0.960
			2	0.455	0.925	0.325	0.953
			3	0.799	0.914	0.434	0.941
	(50,40)		1	0.311	0.948	0.123	0.976
			2	0.347	0.945	0.215	0.971
			3	0.470	0.939	0.217	0.967
	(100,40)		1	0.247	0.958	0.197	0.982
			2	0.277	0.953	0.203	0.981
			3	0.313	0.946	0.217	0.979
	(100,80)		1	0.253	0.965	0.116	0.990
			2	0.269	0.961	0.136	0.987
			3	0.365	0.954	0.191	0.983

Table S7: The ACLs (1st column) and CPs (2nd column) of ACI/HPD credible intervals of $R(t)$.

T	(n, m)	Scheme	ACI		HPD				
			1	2	1	2			
Prior \rightarrow	0.5	(50,20)	1	0.093	0.962	0.030	0.972	0.017	0.979
			2	0.108	0.948	0.035	0.957	0.023	0.962
			3	0.136	0.925	0.046	0.934	0.024	0.945
	(50,40)		1	0.084	0.978	0.012	0.988	0.011	0.993
			2	0.079	0.965	0.024	0.975	0.018	0.980
			3	0.108	0.946	0.032	0.955	0.026	0.962
	(100,40)		1	0.063	0.975	0.018	0.996	0.013	0.988
			2	0.079	0.969	0.019	0.982	0.014	0.985
			3	0.101	0.948	0.022	0.960	0.018	0.978
	(100,80)		1	0.057	0.985	0.014	0.998	0.013	0.999
			2	0.073	0.974	0.016	0.987	0.013	0.994
			3	0.080	0.971	0.016	0.984	0.014	0.989
1.0	(50,20)		1	0.078	0.969	0.023	0.984	0.013	0.991
			2	0.090	0.955	0.032	0.969	0.015	0.977
			3	0.115	0.943	0.037	0.957	0.018	0.963
	(50,40)		1	0.078	0.983	0.012	0.995	0.012	0.998
			2	0.081	0.975	0.022	0.990	0.013	0.994
			3	0.086	0.968	0.027	0.983	0.014	0.989
	(100,40)		1	0.053	0.982	0.016	0.992	0.010	0.996
			2	0.062	0.976	0.018	0.990	0.014	0.994
			3	0.081	0.967	0.019	0.983	0.016	0.990
	(100,80)		1	0.058	0.988	0.011	0.998	0.011	0.999
			2	0.059	0.988	0.015	0.992	0.012	0.996
			3	0.078	0.981	0.017	0.991	0.014	0.994

Table S8: The ACLs (1st column) and CPs (2nd column) of ACI/HPD credible intervals of $h(t)$.

T	(n, m)	Scheme	ACI		HPD				
			1	2	1	2			
Prior \rightarrow	0.5	(50,20)	1	0.815	0.947	0.324	0.958	0.181	0.969
			2	0.843	0.929	0.365	0.943	0.248	0.953
			3	1.016	0.914	0.482	0.933	0.250	0.942
	(50,40)		1	0.761	0.953	0.235	0.967	0.134	0.976
			2	0.766	0.944	0.251	0.958	0.157	0.967
			3	0.830	0.938	0.344	0.952	0.188	0.961
	(100,40)		1	0.555	0.962	0.192	0.971	0.141	0.980
			2	0.592	0.957	0.201	0.968	0.143	0.979
			3	0.755	0.945	0.222	0.962	0.207	0.968
	(100,80)		1	0.549	0.968	0.132	0.980	0.126	0.982
			2	0.590	0.964	0.160	0.977	0.145	0.980
			3	0.593	0.963	0.183	0.975	0.146	0.980
1.0	(50,20)		1	0.647	0.958	0.234	0.974	0.140	0.978
			2	0.814	0.947	0.348	0.966	0.145	0.975
			3	0.966	0.939	0.402	0.961	0.148	0.974
	(50,40)		1	0.638	0.964	0.126	0.979	0.119	0.985
			2	0.676	0.960	0.247	0.972	0.132	0.979
			3	0.681	0.956	0.291	0.968	0.144	0.976
	(100,40)		1	0.438	0.963	0.159	0.982	0.112	0.988
			2	0.496	0.960	0.194	0.980	0.124	0.983
			3	0.667	0.948	0.203	0.975	0.177	0.979
	(100,80)		1	0.391	0.971	0.113	0.987	0.102	0.990
			2	0.499	0.967	0.145	0.983	0.118	0.987
			3	0.514	0.965	0.172	0.981	0.128	0.984