

Supplementary Materials

Statistical Evaluations and Applications for IER Parameters from Generalized Progressively Type-II Hybrid Censored Data

Ahmed Elshahhat^{1*}, Heba S. Mohammed² and Osama E. Abo-Kasem³

¹Faculty of Technology and Development, Zagazig University, Zagazig 44519, Egypt

²Department of Mathematical Sciences, College of Science, Princess Nourah bint Abdulrahman University,
P.O. Box 84428, Riyadh 11671, Saudi Arabia

³Department of Statistics, Faculty of Commerce, Zagazig University, Zagazig 44519, Egypt

*Email: aelshahhat@dtd.zu.edu.eg

Table S1: The Av.Es (1st column), RMSEs (2nd column) and MABs (3rd column) of δ .

$\nu \rightarrow$	(T_1, T_2)	(n, m)	Scheme	MLE		SE				GE					
						P1		P2				P1			
										-2			+2		
(0.5,1.5)	(40,20)	1	1.620	0.527	0.389	1.296	0.256	0.224	1.305	0.196	0.195	1.271	0.229	0.229	
						1.607	0.118	0.107	1.608	0.108	0.108	1.604	0.105	0.104	
			2	1.652	0.534	0.388	1.822	0.343	0.324	1.826	0.327	0.326	1.810	0.312	0.310
	(40,32)	3	1.654	0.491	0.369	1.287	0.259	0.225	1.296	0.205	0.204	1.265	0.235	0.235	
						1.570	0.076	0.070	1.570	0.070	0.070	1.569	0.069	0.069	
			1	1.625	0.469	0.356	1.643	0.204	0.161	1.650	0.150	0.150	1.355	0.145	0.145
	(80,40)	2				1.574	0.079	0.074	1.574	0.074	0.074	1.573	0.073	0.073	
			2	1.638	0.466	0.352	1.286	0.261	0.228	1.294	0.206	0.206	1.262	0.238	0.238
			3	1.616	0.448	0.339	1.673	0.223	0.187	1.679	0.179	0.179	1.656	0.156	0.156
(1.5,2.5)	(40,20)	1	1.555	0.355	0.280	1.362	0.162	0.147	1.364	0.136	0.136	1.624	0.124	0.124	
						1.563	0.070	0.063	1.563	0.063	0.063	1.562	0.062	0.062	
			2	1.576	0.335	0.261	1.391	0.137	0.121	1.393	0.107	0.107	1.384	0.116	0.116
	(40,32)	3				1.558	0.066	0.059	1.559	0.059	0.059	1.557	0.058	0.057	
			2	1.577	0.314	0.240	1.365	0.158	0.141	1.367	0.133	0.133	1.358	0.142	0.142
			3			1.510	0.054	0.046	1.514	0.014	0.014	1.513	0.014	0.013	
	(80,64)	1	1.551	0.311	0.243	1.468	0.070	0.059	1.469	0.031	0.031	1.464	0.036	0.036	
						1.513	0.056	0.047	1.514	0.016	0.014	1.510	0.012	0.010	
			2	1.558	0.301	0.234	1.478	0.068	0.059	1.480	0.021	0.020	1.474	0.027	0.026
	(80,64)	3				1.511	0.055	0.047	1.512	0.014	0.012	1.508	0.010	0.008	
			2	1.547	0.289	0.226	1.475	0.070	0.060	1.477	0.024	0.023	1.471	0.030	0.029
			3			1.514	0.027	0.022	1.511	0.013	0.011	1.508	0.010	0.008	
(1.5,2.5)	(40,20)	1	1.611	0.449	0.346	1.273	0.275	0.240	1.283	0.218	0.217	1.2479	0.252	0.2521	
						1.598	0.108	0.098	1.598	0.098	0.098	1.5955	0.096	0.0955	
			2	1.632	0.447	0.341	1.284	0.262	0.228	1.292	0.208	0.208	1.2610	0.239	0.2390
	(40,32)	3				1.598	0.108	0.098	1.598	0.098	0.098	1.5955	0.096	0.0955	
			2	1.517	0.433	0.335	1.263	0.281	0.245	1.272	0.229	0.228	1.2389	0.261	0.2611
			3			1.567	0.073	0.067	1.567	0.067	0.067	1.5661	0.066	0.0661	
	(80,40)	1	1.598	0.402	0.309	1.619	0.194	0.156	1.361	0.139	0.139	1.3512	0.149	0.1488	
						1.569	0.075	0.069	1.570	0.070	0.070	1.5685	0.069	0.0685	
			2	1.603	0.396	0.304	1.607	0.183	0.149	1.373	0.127	0.127	1.3639	0.136	0.1361
	(80,64)	3				1.570	0.075	0.070	1.570	0.070	0.070	1.5689	0.069	0.0689	
			2	1.607	0.395	0.299	1.358	0.164	0.147	1.361	0.139	0.139	1.3512	0.149	0.1488
			3			1.551	0.059	0.052	1.552	0.052	0.052	1.5505	0.051	0.0505	
(1.5,2.5)	(40,20)	1	1.484	0.286	0.224	1.358	0.164	0.147	1.627	0.127	0.127	1.5976	0.098	0.0976	
						1.551	0.059	0.052	1.552	0.052	0.052	1.5505	0.051	0.0505	
			2	1.555	0.295	0.229	1.371	0.153	0.137	1.614	0.114	0.114	1.5864	0.087	0.0864
	(40,32)	3				1.556	0.064	0.056	1.556	0.056	0.056	1.5549	0.055	0.0549	
			2	1.484	0.286	0.224	1.406	0.122	0.097	1.408	0.092	0.092	1.3989	0.101	0.1011
			3			1.494	0.049	0.042	1.495	0.008	0.008	1.4920	0.009	0.0083	
	(80,64)	1	1.539	0.266	0.211	1.459	0.071	0.058	1.460	0.040	0.040	1.4557	0.044	0.0443	
						1.499	0.052	0.045	1.500	0.006	0.005	1.4966	0.007	0.0058	
			2	1.538	0.259	0.206	1.458	0.071	0.058	1.459	0.041	0.041	1.4543	0.046	0.0457
	(80,64)	3				1.501	0.052	0.045	1.502	0.007	0.006	1.4987	0.006	0.0052	
			2	1.541	0.251	0.200	1.442	0.082	0.067	1.443	0.057	0.057	1.4384	0.062	0.0616
			3			1.500	0.020	0.016	1.500	0.003	0.003	1.4994	0.003	0.0026	

Table S2: The Av.Es (1st column), RMSEs (2nd column) and MABs (3rd column) of μ .

(T_1, T_2)	(n, m)	Scheme	MLE			SE			GE					
						P1	P2				P1	P2		
			$\nu \rightarrow$							-2				
(0.5,1.5)	(40,20)	1	1.190	0.669	0.452	1.561	0.542	0.411	1.519	0.520	0.419	1.473	0.475	0.373
		2	1.264	0.745	0.491	1.522	0.599	0.417	1.549	0.551	0.472	1.447	0.448	0.447
		3	1.241	0.723	0.437	1.580	0.681	0.383	1.619	0.621	0.370	1.460	0.465	0.345
	(40,32)	1	1.157	0.510	0.366	1.505	0.447	0.309	1.501	0.402	0.301	1.457	0.460	0.257
		2	1.181	0.536	0.375	1.498	0.451	0.298	1.516	0.417	0.147	1.134	0.135	0.134
		3	1.135	0.470	0.334	1.527	0.403	0.272	1.514	0.415	0.314	1.447	0.450	0.296
	(80,40)	1	1.078	0.400	0.297	1.484	0.336	0.264	1.372	0.372	0.272	1.419	0.337	0.219
		2	1.122	0.437	0.315	1.466	0.386	0.266	1.472	0.373	0.249	1.431	0.344	0.237
		3	1.097	0.356	0.255	1.497	0.331	0.198	1.414	0.314	0.214	1.434	0.437	0.200
(80,64)	(80,64)	1	1.067	0.321	0.238	1.368	0.303	0.218	1.591	0.293	0.191	1.354	0.270	0.154
		2	1.078	0.326	0.234	1.363	0.277	0.211	1.367	0.267	0.211	1.350	0.251	0.197
		3	1.057	0.285	0.213	1.410	0.214	0.188	1.554	0.250	0.152	1.396	0.397	0.140
	(40,20)	1	1.116	0.422	0.309	1.620	0.362	0.222	1.689	0.391	0.239	1.563	0.367	0.225
		2	1.174	0.521	0.362	1.640	0.414	0.333	1.670	0.438	0.254	1.570	0.373	0.230
		3	1.098	0.350	0.245	1.677	0.317	0.217	1.706	0.279	0.206	1.590	0.292	0.202
	(40,32)	1	1.087	0.340	0.251	1.546	0.296	0.185	1.636	0.237	0.216	1.572	0.218	0.172
		2	1.099	0.358	0.260	1.629	0.326	0.227	1.646	0.327	0.215	1.552	0.255	0.192
		3	0.969	0.295	0.225	1.153	0.160	0.153	1.154	0.154	0.154	1.149	0.140	0.132
(80,40)	(80,40)	1	1.035	0.211	0.165	1.431	0.185	0.131	1.564	0.165	0.135	1.478	0.141	0.128
		2	1.068	0.314	0.238	1.516	0.266	0.216	1.533	0.234	0.209	1.452	0.155	0.152
		3	1.037	0.205	0.157	1.408	0.169	0.132	1.435	0.155	0.135	1.416	0.147	0.126
	(80,64)	1	0.937	0.195	0.157	1.132	0.139	0.108	1.133	0.133	0.113	1.130	0.130	0.103
		2	1.037	0.221	0.171	1.428	0.143	0.128	1.432	0.161	0.143	1.412	0.113	0.112
		3	0.937	0.195	0.156	1.431	0.145	0.093	1.427	0.127	0.127	1.353	0.114	0.113

Table S3: The Av.Es (1st column), RMSEs (2nd column) and MABs (3rd column) of $R(t)$.

(T_1, T_2)	(n, m)	Scheme	MLE				SE				GE			
							P1	P2			P1	P2		
			$\nu \rightarrow$										-2	+2
(0.5,1.5)	(40,20)	1	0.930	0.137	0.130	0.843	0.102	0.088	0.930	0.089	0.085	0.842	0.088	0.083
		2	0.932	0.132	0.126	0.844	0.100	0.087	0.923	0.076	0.076	0.931	0.075	0.073
		3	0.933	0.131	0.125	0.847	0.098	0.084	0.848	0.082	0.082	0.840	0.081	0.080
	(40,32)	1	0.932	0.093	0.091	0.876	0.058	0.054	0.846	0.085	0.077	0.923	0.077	0.073
		2	0.933	0.091	0.086	0.879	0.056	0.052	0.923	0.075	0.075	0.930	0.072	0.059
		3	0.932	0.090	0.084	0.885	0.050	0.045	0.879	0.052	0.052	0.885	0.046	0.046
	(80,40)	1	0.930	0.074	0.072	0.889	0.045	0.042	0.876	0.054	0.054	0.888	0.042	0.042
		2	0.931	0.072	0.071	0.892	0.041	0.038	0.885	0.045	0.045	0.893	0.038	0.038
		3	0.931	0.071	0.070	0.893	0.040	0.037	0.889	0.042	0.042	0.875	0.041	0.040
(1.5,2.5)	(40,20)	1	0.930	0.124	0.125	0.835	0.111	0.096	0.831	0.100	0.099	0.824	0.107	0.103
		2	0.932	0.121	0.122	0.841	0.103	0.090	0.836	0.094	0.094	0.837	0.094	0.094
		3	0.929	0.113	0.121	0.829	0.101	0.081	0.896	0.084	0.084	0.920	0.084	0.088
	(40,32)	1	0.931	0.083	0.086	0.873	0.062	0.058	0.843	0.079	0.078	0.829	0.074	0.064
		2	0.932	0.081	0.085	0.876	0.059	0.055	0.873	0.057	0.057	0.879	0.071	0.061
		3	0.932	0.079	0.082	0.875	0.058	0.053	0.876	0.054	0.054	0.929	0.070	0.055
	(80,40)	1	0.930	0.068	0.062	0.880	0.053	0.051	0.873	0.057	0.057	0.872	0.058	0.058
		2	0.931	0.066	0.061	0.881	0.052	0.050	0.935	0.048	0.048	0.874	0.056	0.056
		3	0.930	0.064	0.060	0.928	0.046	0.038	0.935	0.048	0.048	0.935	0.048	0.048
(80,64)	(40,20)	1	0.930	0.054	0.050	0.905	0.044	0.033	0.903	0.027	0.027	0.901	0.030	0.030
		2	0.930	0.052	0.048	0.929	0.037	0.032	0.928	0.023	0.023	0.928	0.021	0.021
		3	0.931	0.051	0.047	0.930	0.036	0.031	0.928	0.021	0.021	0.930	0.024	0.022
	(40,32)	1	0.930	0.054	0.050	0.928	0.041	0.032	0.928	0.025	0.025	0.932	0.027	0.026
		2	0.930	0.052	0.048	0.932	0.030	0.025	0.930	0.020	0.022	0.920	0.020	0.020
		3	0.931	0.051	0.047	0.920	0.021	0.020	0.919	0.016	0.019	0.919	0.019	0.018

Table S4: The Av.Es (1st column), RMSEs (2nd column) and MABs (3rd column) of $h(t)$.

(T_1, T_2)	(n, m)	Scheme	MLE			SE				GE				
						P1	P2				P1	P2		
			$\nu \rightarrow$	-2	+2									
(0.5,1.5)	(40,20)	1	0.512	0.208	0.169	1.071	0.196	0.142	1.114	0.184	0.149	0.895	0.169	0.136
		2	0.513	0.180	0.140	0.834	0.169	0.134	1.092	0.162	0.128	0.892	0.137	0.121
		3	0.506	0.164	0.131	0.594	0.156	0.113	0.560	0.129	0.121	0.502	0.121	0.113
	(40,32)	1	0.507	0.173	0.140	1.050	0.136	0.122	1.108	0.158	0.136	0.857	0.133	0.126
		2	0.506	0.164	0.132	0.891	0.118	0.120	0.843	0.131	0.117	0.595	0.124	0.114
		3	0.505	0.161	0.130	0.559	0.107	0.103	0.544	0.121	0.113	0.606	0.118	0.107
	(80,40)	1	0.517	0.141	0.114	0.856	0.112	0.102	0.831	0.129	0.100	0.825	0.119	0.094
		2	0.518	0.119	0.095	0.829	0.102	0.087	0.555	0.104	0.084	0.587	0.099	0.082
		3	0.516	0.116	0.092	0.596	0.098	0.082	0.548	0.102	0.078	0.558	0.087	0.074
(1.5,2.5)	(40,20)	1	0.521	0.122	0.098	0.823	0.100	0.092	0.720	0.109	0.089	0.803	0.107	0.087
		2	0.521	0.114	0.091	0.595	0.097	0.084	0.593	0.090	0.077	0.594	0.088	0.076
		3	0.520	0.113	0.090	0.555	0.091	0.082	0.553	0.082	0.071	0.595	0.064	0.064
	(40,32)	1	0.517	0.199	0.162	1.124	0.177	0.159	0.921	0.189	0.152	0.910	0.184	0.140
		2	0.513	0.175	0.141	0.896	0.163	0.136	0.921	0.144	0.124	0.665	0.138	0.113
		3	0.510	0.159	0.128	0.842	0.147	0.121	1.127	0.135	0.108	0.560	0.129	0.104
	(80,40)	1	0.524	0.121	0.097	0.911	0.107	0.089	0.820	0.110	0.092	0.875	0.095	0.084
		2	0.519	0.116	0.093	0.558	0.104	0.085	0.617	0.087	0.086	0.562	0.083	0.081
		3	0.522	0.110	0.089	0.573	0.098	0.079	0.566	0.080	0.082	0.877	0.072	0.078
(80,64)	(40,20)	1	0.523	0.112	0.089	0.623	0.097	0.083	0.624	0.093	0.083	0.915	0.085	0.081
		2	0.505	0.110	0.081	0.561	0.086	0.080	0.614	0.083	0.071	0.571	0.081	0.068
		3	0.505	0.099	0.079	0.564	0.080	0.074	0.564	0.075	0.063	0.929	0.070	0.059
	(40,32)	1	0.523	0.112	0.089	0.565	0.082	0.074	0.562	0.085	0.078	0.621	0.080	0.070
		2	0.522	0.110	0.089	0.522	0.075	0.070	0.559	0.076	0.060	0.521	0.071	0.059
		3	0.522	0.110	0.089	0.522	0.072	0.067	0.518	0.069	0.057	0.521	0.064	0.048

Table S5: The ACLs (1st column) and CPs (2nd column) of 95% ACI/HPD intervals of δ .

(Prior →)	(T_1, T_2)	(n, m)	Scheme	ACI		HPD			
						1		2	
				ACL	CP	ACL	CP	ACL	CP
(0.5,1.5)	(40,20)		1	1.982	0.942	0.526	0.964	0.170	0.976
			2	1.880	0.944	0.485	0.966	0.167	0.977
			3	1.740	0.945	0.474	0.967	0.165	0.977
	(40,32)		1	1.773	0.947	0.474	0.970	0.166	0.979
			2	1.712	0.950	0.471	0.971	0.143	0.981
			3	1.662	0.952	0.405	0.973	0.122	0.983
	(80,40)		1	1.408	0.949	0.342	0.976	0.120	0.985
			2	1.292	0.951	0.320	0.978	0.114	0.988
			3	1.177	0.955	0.296	0.980	0.111	0.989
(1.5,2.5)	(80,64)		1	1.220	0.958	0.227	0.984	0.113	0.990
			2	1.165	0.960	0.225	0.984	0.111	0.990
			3	1.133	0.961	0.216	0.985	0.095	0.991
	(40,20)		1	1.699	0.948	0.492	0.967	0.164	0.978
			2	1.608	0.950	0.482	0.969	0.160	0.979
			3	1.593	0.952	0.454	0.970	0.158	0.979
	(40,32)		1	1.489	0.953	0.469	0.972	0.135	0.983
			2	1.452	0.955	0.453	0.974	0.128	0.983
			3	1.410	0.957	0.285	0.981	0.119	0.984
(80,40)	(80,40)		1	1.111	0.960	0.309	0.978	0.124	0.986
			2	1.105	0.961	0.299	0.980	0.119	0.989
			3	1.111	0.962	0.212	0.985	0.113	0.989
	(80,64)		1	1.035	0.961	0.206	0.986	0.111	0.990
			2	0.998	0.963	0.203	0.985	0.109	0.990
			3	0.963	0.965	0.201	0.986	0.093	0.991

Table S6: The ACLs (1st column) and CPs (2nd column) of 95% ACI/HPD intervals of μ .

(Prior →)	(T_1, T_2)	(n, m)	Scheme	ACI		HPD			
						1		2	
				ACL	CP	ACL	CP	ACL	CP
(0.5,1.5)	(40,20)		1	2.350	0.937	0.968	0.962	0.285	0.987
			2	2.566	0.939	0.925	0.966	0.273	0.988
			3	2.078	0.941	0.875	0.971	0.271	0.988
	(40,32)		1	1.886	0.942	0.788	0.970	0.217	0.989
			2	1.878	0.944	0.735	0.977	0.197	0.991
			3	1.689	0.948	0.721	0.978	0.180	0.993
	(80,40)		1	1.494	0.950	0.722	0.976	0.176	0.994
			2	1.574	0.951	0.694	0.978	0.167	0.995
			3	1.215	0.952	0.480	0.982	0.163	0.995
(1.5,2.5)	(80,64)		1	1.211	0.955	0.385	0.986	0.165	0.996
			2	1.184	0.958	0.379	0.986	0.135	0.998
			3	1.090	0.960	0.374	0.987	0.131	0.998
	(40,20)		1	1.782	0.952	1.122	0.959	0.319	0.981
			2	1.536	0.953	0.956	0.964	0.311	0.982
			3	1.428	0.954	0.949	0.965	0.307	0.982
	(40,32)		1	1.261	0.954	0.876	0.968	0.268	0.984
			2	1.212	0.956	0.777	0.972	0.213	0.987
			3	1.145	0.960	0.750	0.974	0.184	0.989
(80,40)	(80,40)		1	1.137	0.962	0.762	0.973	0.191	0.990
			2	0.983	0.964	0.756	0.974	0.178	0.991
			3	0.963	0.966	0.734	0.976	0.171	0.992
	(80,64)		1	0.835	0.967	0.405	0.982	0.169	0.994
			2	0.812	0.969	0.396	0.982	0.165	0.994
			3	0.747	0.972	0.386	0.983	0.162	0.995

Table S7: The ACLs (1st column) and CPs (2nd column) of 95% ACI/HPD intervals of $R(t)$.

(Prior →)	(T_1, T_2)	(n, m)	Scheme	ACI		HPD			
						1		2	
				ACL	CP	ACL	CP	ACL	CP
(0.5,1.5)	(40,20)		1	0.173	0.905	0.145	0.937	0.130	0.941
			2	0.167	0.906	0.133	0.939	0.118	0.945
			3	0.158	0.907	0.129	0.940	0.114	0.946
	(40,32)		1	0.129	0.916	0.108	0.948	0.102	0.949
			2	0.121	0.918	0.101	0.949	0.096	0.952
			3	0.118	0.920	0.095	0.951	0.086	0.955
	(80,40)		1	0.110	0.924	0.084	0.957	0.079	0.958
			2	0.089	0.926	0.081	0.957	0.076	0.960
			3	0.088	0.932	0.078	0.959	0.071	0.963
(1.5,2.5)	(80,64)		1	0.096	0.932	0.069	0.963	0.064	0.962
			2	0.088	0.934	0.065	0.963	0.061	0.965
			3	0.076	0.936	0.060	0.964	0.057	0.967
	(40,20)		1	0.156	0.909	0.143	0.938	0.120	0.944
			2	0.155	0.910	0.125	0.941	0.112	0.946
			3	0.154	0.911	0.120	0.942	0.103	0.947
	(40,32)		1	0.127	0.917	0.102	0.950	0.094	0.953
			2	0.119	0.919	0.093	0.952	0.088	0.954
			3	0.111	0.921	0.090	0.953	0.080	0.956
(80,40)	(80,40)		1	0.094	0.928	0.079	0.959	0.071	0.962
			2	0.090	0.931	0.075	0.960	0.067	0.963
			3	0.083	0.934	0.067	0.963	0.061	0.965
	(80,64)		1	0.090	0.933	0.059	0.965	0.054	0.966
			2	0.086	0.935	0.051	0.966	0.048	0.968
			3	0.074	0.938	0.046	0.968	0.041	0.970

Table S8: The ACLs (1st column) and CPs (2nd column) of 95% ACI/HPD intervals of $h(t)$.

(Prior →)	(T_1, T_2)	(n, m)	Scheme	ACI		HPD			
						1		2	
				ACL	CP	ACL	CP	ACL	CP
(0.5,1.5)	(40,20)		1	1.010	0.913	0.787	0.921	0.692	0.926
			2	0.977	0.918	0.692	0.925	0.578	0.932
			3	0.927	0.922	0.682	0.926	0.527	0.934
	(40,32)		1	0.763	0.925	0.661	0.929	0.577	0.932
			2	0.620	0.928	0.596	0.932	0.518	0.937
			3	0.611	0.930	0.463	0.941	0.414	0.948
	(80,40)		1	0.564	0.934	0.520	0.937	0.370	0.956
			2	0.459	0.942	0.432	0.952	0.315	0.959
			3	0.440	0.944	0.408	0.954	0.302	0.960
(1.5,2.5)	(80,64)		1	0.476	0.950	0.420	0.953	0.280	0.961
			2	0.441	0.952	0.404	0.954	0.220	0.963
			3	0.437	0.952	0.356	0.957	0.185	0.967
	(40,20)		1	0.919	0.923	0.752	0.925	0.671	0.930
			2	0.911	0.925	0.653	0.929	0.571	0.933
			3	0.901	0.926	0.622	0.932	0.483	0.937
	(40,32)		1	0.648	0.930	0.616	0.933	0.522	0.937
			2	0.614	0.932	0.569	0.936	0.505	0.939
			3	0.583	0.935	0.456	0.942	0.371	0.956
(80,40)	(80,40)		1	0.471	0.939	0.438	0.948	0.323	0.958
			2	0.435	0.944	0.410	0.953	0.299	0.962
			3	0.414	0.946	0.381	0.957	0.283	0.963
	(80,64)		1	0.450	0.952	0.413	0.955	0.179	0.969
			2	0.422	0.954	0.384	0.956	0.157	0.972
			3	0.402	0.957	0.345	0.959	0.159	0.972